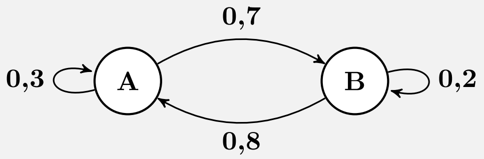
Suite de Matrices - Spé Maths
Évolution - Arbre et Graphe probabiliste
Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Graphe probabiliste et matrice

Un automate peut se trouver dans deux états **A** ou **B**. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.



Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état **A** après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état **B** après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état **B**.
Gaspard affirme qu'après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état **A** que d'être dans l'état **B**. Cette affirmation est-elle vraie ?

Matrices : suite du type $U_{n+1} = AU_n$

Des souris sont dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte dix minutes tous les jours. Chaque jour 20 % des souris du compartiment A passent dans le compartiment B et 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B passent dans le compartiment A. Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B après n jours et on convient que $a_0 = b_0 = 0{,}5$ et on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer pour tout entier naturel n, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
4. On admet que pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 2 \times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1 - 0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2 - 2 \times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2 + 0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$. Que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B ?

Matrices et suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

1. Donner U_0 et U_1.
2. Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n, on ait : $U_{n+1} = AU_n$.
3. Donner sans justifier pour tout entier naturel n, U_n en fonction de A, n et U_0.
4. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & -2^n+1 \\ 2^{n+1}-2 & -2^n+2 \end{pmatrix}$.

   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n puis donner la limite de la suite (u_n).

Matrices : une suite du type $U_{n+1} = AU_n + B$

Soit (U_n) la suite de matrices de taille $(2\ ;\ 1)$ définie pour tout entier naturel n par :
$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A(I_2 - A)$ et en déduire que la matrice $I_2 - A$ est inversible. Donner $(I_2 - A)^{-1}$.
2. Déterminer la matrice L de taille $(2\ ;\ 1)$ qui vérifie $L = AL + B$.
3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - L$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel, $V_{n+1} = AV_n$.
   (b) En déduire une expression de V_n puis de U_n en fonction de A et n.
4. On admet que la suite (A^n) tend vers la matrice nulle d'ordre 2 lorsque n tend vers l'infini, que peut-on en déduire pour la suite (U_n) ?

Marches aléatoires : le cours sur un exemple

Exemple : Dans un pays (imaginaire !), s'il fait beau et sec un jour, il fera encore beau et sec avec une probabilité de $5/6$ le lendemain. Dans le cas contraire, il fera humide. S'il fait humide un jour, on convient également qu'il fera encore humide avec une probabilité de $2/3$ et qu'il fera beau et sec sinon. Aujourd'hui, il fait beau et sec.
On note A_n l'événement : $\ll$ il fait beau et sec dans n jours $\gg$ et B_n l'événement : $\ll$ il fait humide dans n jours $\gg$.
On souhaiterait calculer $\mathbb{P}(A_n) = p_n$ et $\mathbb{P}(B_n) = q_n$ pour tout entier n.

Marches aléatoires : un problème d'urnes

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Ce processus peut être vue comme une marche aléatoire sur un espace à trois états : $\boldsymbol{A}$: ≪ il y a 0 boule blanche dans U ≫, $\boldsymbol{B}$: ≪ il y a 1 boule blanche dans U ≫ et $\boldsymbol{C}$: ≪ il y a 2 boules blanches dans U ≫.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
2. Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on note $\boldsymbol{P_n}$ la matrice d'état du système après $\boldsymbol{n}$ tirages. On a donc en particulier $\boldsymbol{P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. Déterminer la matrice de transition $\boldsymbol{T}$ telle que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{P_{n+1} = P_n T}$.
3. On admet que la suite de matrices $\boldsymbol{(P_n)}$ converge vers une matrice d'état stable $\boldsymbol{P}$ qui vérifie $\boldsymbol{P = PT}$. Déterminer $\boldsymbol{P}$ et interpréter.

Marches aléatoires : le problème du collectionneur

Une marque de corn flakes donne en cadeau une figurine dans chacun de ses paquets. Il y a **3** figurines différentes. Combien faut-il acheter de paquets pour être sûr à au moins 90% d'avoir la collection complète (en supposant que les différentes figurines sont équitablement réparties dans les paquets) ?