Dérivation - Compléments
Exercices
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Calculer rapidement des dérivées avec des quotients et des puissances
Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction sur l'intervalle I indiqué :

a) $f(x) = \dfrac{5x^4}{2} - \dfrac{3}{4x^2} - \dfrac{2}{3}$ et $\text{I}=]-\infty;0[$.

b) $f(t) = \dfrac{5}{(t^2+1)^3}$ et $\text{I}=\mathbb{R}$.

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(3 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$.

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par $f(t) = \left(\dfrac{t+2}{t-1}\right)^2$.

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)^4\left(1-x^2\right)^7$.

Calculer des dérivées avec des racines
On considère la fonction f définie sur $[-1;2]$ par $f(x) = \sqrt{-x^2+x+2}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-1;2[$.
2. Pour tout x de $]-1;2[$, calculer $f'(x)$.

Dérivée de u^n
On rappelle que :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors $\begin{cases} \text{la fonction } u\times v \text{ est dérivable sur I} \\ (u\times v)' = u'v + uv' \end{cases}$

Soit u une fonction dérivable sur I.

1. Démontrer que u^2 est dérivable sur I et déterminer $\left(u^2\right)'$.
2. Démontrer que u^3 est dérivable sur I et déterminer $\left(u^3\right)'$.
3. Quelles conjectures peut-on faire ?
4. Démontrer ces conjectures.

Problème de dérivabilité avec des racines
1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Justifier que f n'est pas dérivable en 0.
2) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Justifier que g est dérivable en 0.

Variations d'une famille de fonctions
Pour tout entier $n \geq 1$, on note la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-2x)^n$.

1. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer les variations des fonctions f_n selon les valeurs de n.
2. Démontrer votre conjecture.

Points fixes d'une famille de fonctions
Pour tout entier $n \geq 1$, on note la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2-2x)^n$.
Démontrer que toutes les courbes représentatives des fonctions f_n passent par 4 points fixes, c'est à dire dont les coordonnées ne dépendent pas de n. Donner les coordonnées de ces 4 points fixes.

Tangente passant par un point donné
On considère la fonction f définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2) Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ passant par le point A(1 ;0) ? Justifier.

Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{x^2}$.

Étudier les variations de la fonction f.

Tangente parallèle à une droite donnée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{1+x^2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -x+4$?

Dans l'affirmative, préciser le nombre de ces points et leur abscisse.

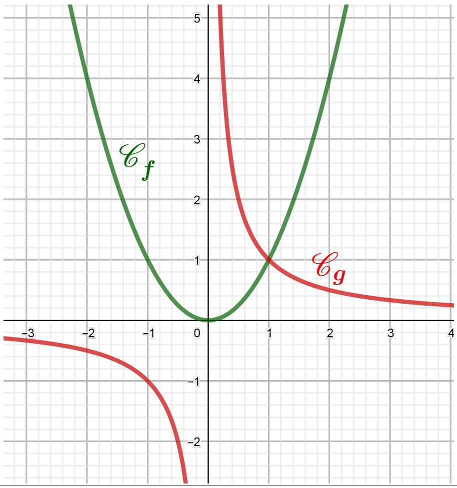
Pour traiter le problème, on a obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel, le résultat suivant que vous pouvez utiliser :

$$\text{Développer}\left(\frac{-3(1-x)^2(1+x^2)-2x(1-x)^3}{(1+x^2)^2}\right) \to \frac{-x^4+4x-3}{x^4+2x^2+1}$$

Tangente commune à 2 courbes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

L'objectif de ce problème est de montrer que les courbes de f et g admettent une tangente commune dont on donnera une équation. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe de f et $\mathscr{C}_g$ la courbe de g, représentées ci-dessous :

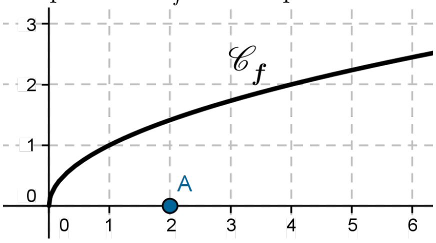


1. Résoudre le problème graphiquement.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse b.
4. Démontrer que l'existence d'une tangente commune revient à résoudre : $\begin{cases} 2\,a = -\dfrac{1}{b^2} \\ -\,a^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$
5. Justifier que l'équation $x^3 = -8$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de cette solution.
6. Conclure.

Distance d'un point à une courbe

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f.

Soit M un point de $\mathscr{C}_f$ et A le point de coordonnées (2 ;0).



1°) A l'aide du graphique ci-dessus, Déterminer graphiquement les coordonnées de M pour que la distance AM soit minimale.

Le but de la question 2°) est de déterminer par le calcul les coordonnées de M pour que la distance AM soit minimale.

2°) On note x l'abscisse de M et on pose $g(x) = AM$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{x^2-3x+4}$.

b) Justifier que g est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et déterminer $g'(x)$.

c) En déduire les variations de g.

d) Conclure.

3°) On suppose maintenant que le point M a pour abscisse $\dfrac{3}{2}$.

a) On appelle T la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M. Déterminer le coefficient directeur de T.

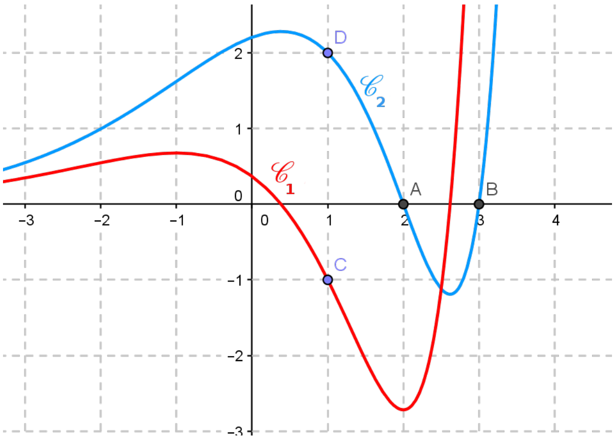
b) Tracer T sur le graphique où est tracée $\mathscr{C}_f$.
Quelle conjecture peut-on faire concernant T et la droite (AM) ?

c) Démontrer cette conjecture.

Reconnaître les courbes de f et f' graphiquement

On a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

L'une est la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. L'autre est la courbe de sa dérivée f'.



1) Associer à chaque courbe, la fonction qui lui correspond en justifiant.

2) A l'aide du graphique, déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
