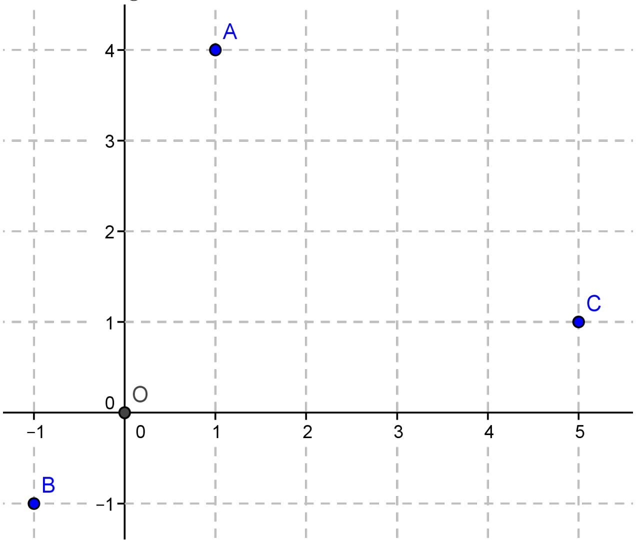
Exercices sur le module d'un nombre complexe
Corrigés en vidéo et le cours sur jaicompris.com

Comprendre le lien entre module et longueur

On considère la figure suivante :



1) À l'aide d'un compas, déterminer une valeur approchée des longueurs OA, OB, OC, AB, AC et BC.
2) Lire les affixes z_A, z_B, z_C des points A, B et C.
3) Déterminer $|z_A|$, $|z_B|$, $|z_C|$. Est-ce cohérent ?
4) Déterminer $|z_C - z_A|$, $|z_B - z_A|$ et $|z_B - z_C|$. Est-ce cohérent ?
5) Le triangle ABC est-il rectangle, isocèle ou équilatéral ?

Savoir calculer le module d'un nombre complexe

Déterminer le module de z dans chacun des cas suivants :

$z = 2$ $\qquad$ $z = -3$ $\qquad$ $z = 4i$ $\qquad$ $z = \sqrt{3} + 3i$ $\qquad$ $z = \dfrac{2}{i}$ $\qquad$ $z = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$

Module d'un nombre complexe - Démonstration de cours - ROC

Démontrer que pour tout nombre complexe z, $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.

Savoir utiliser les propriétés des modules

Soit $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 + 2i$.

Déterminer les modules de z_1, z_2, $-\sqrt{2} - i\sqrt{6}$, $2 - 2i$ et de $\dfrac{-\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{(2-2i)^2}$

Module d'un produit, d'un quotient, d'une somme

1) Déterminer le module de $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + i$.
2) Déterminer le module des nombres suivants, en utilisant si possible la question 1)

$\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{-1 - i}$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ $\qquad$ $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^2}{(1-i)^3}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$ $\qquad$ $z_1 + z_2$

Interpréter un module en terme de longueur - lien avec cercle et médiatrice

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $|z - 3| = 4$ $\qquad$ b) $|z + 1 - i| = 3$ $\qquad$ c) $|z + 2| = |z - 2 + 3i|$ $\qquad$ d) $|4 - z| = |\overline{z} - 1 + 2i|$.

Interpréter le module de $|z-a|$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, construire l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions : $\begin{cases} |z-1| = |z+i| \\ |z-3+2i| \leq 2 \end{cases}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

On note Γ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z-2-3i| = |z-4+i|$.

1) Justifier que le point $C(1;0)$ appartient à Γ.

2) Déterminer l'ensemble Γ en posant $z = x+iy$ et le représenter.

3) Refaire la question 2) par une autre méthode.

Utilisation du module d'un nombre complexe en géométrie

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -1-5i$, $z_B = 7+i$ et $z_C = 8-2i$.

1) Déterminer la nature du triangle ABC.

2) En déduire que A, B et C sont sur un même cercle. On note I le centre de ce cercle. Déterminer l'affixe de I et le rayon de ce cercle.

3) Le point D(0 ;2) est-il également sur ce cercle ? Justifier.

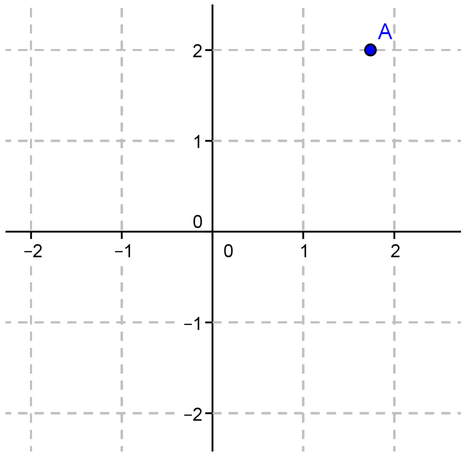
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

À tout point M d'affixe z différente de $3i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-2}{iz+3}$.

Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que M' soit sur le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}+2i$, $z_B = -\overline{z}_A$ et $z_C = -i$.

1) On a placé le point A sur la figure ci-contre :
Placer les points B et C.



2) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit G, le centre de gravité du triangle ABC.
   a) Placer le point G sur la figure en faisant apparaitre les traits de construction.
   b) Rappeler la définition vectorielle de G.
   c) Déterminer z_G, l'affixe de G.

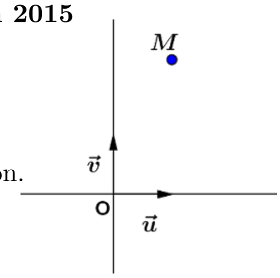
4) Soit I le milieu du segment [AG].
Déterminer z_I, l'affixe de I. Placer le point I sur la figure.

5) Soit J, le point tel que GIJC soit un parallélogramme.
Déterminer z_J, l'affixe de J.

6) Démontrer que les droites (GJ) et (CJ) sont perpendiculaires.

7) En déduire que J est sur un cercle que l'on précisera.
Placer J sur la figure.

Suite de nombres complexes - Sujet Bac S Antilles Guyane Juin 2015
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
On a placé un point M d'affixe z sur la figure ci-contre :



Soit M' le point d'affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z+|z|}{2}\right)$.
1) Construire le point M' sur la figure en laissant les traits de construction.
2) On définit la suite de nombres complexes (z_n) de premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$.
a) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un réel négatif ?
b) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un réel positif ?
c) On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$? Justifier.

Problème ouvert - Module
Quels sont les nombres complexes z tels z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ aient même module ?

Suite de nombres complexes et disque
On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = 100$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{i}{3}z_n$. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{AM} \leq r$.
Démontrer qu'à partir d'un certain rang, tous les points $\mathrm{M_n}$ appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Nombres complexes et triangle équilatéral
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.
Gaspard affirme que l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral. Gaspard a-t-il raison ? Justifier.

Nombres complexes, équation et cercle
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0$.
Nasser affirme que les solutions de cette équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre P d'affixe 2. Nasser a-t-il raison ? Justifier.

Règle du produit nul et nombre complexe
On rappelle la règle du produit nul : $x \cdot y \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.
Cette règle qui est vraie avec des nombres réels, est-elle encore vraie avec des nombres complexes ?

Objectif : Savoir calculer un module, faire le lien entre module et longueur, Trouver un ensemble de point, cercle et médiatrice