Théorème de Gauss - Spé maths - Terminale S : Exercices

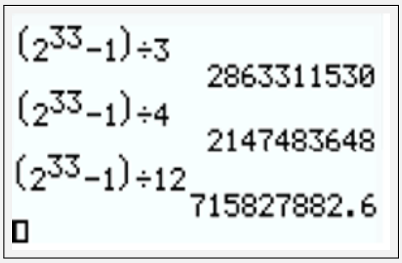
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

Résoudre une équation diophantienne du type $ax + by = c$

1. Justifier que l'équation : $\boldsymbol{15x - 9y = 14}$ n'admet aucun couple d'entiers $\boldsymbol{(x\ ;\ y)}$ solution.
2. On souhaite maintenant résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $\boldsymbol{(E) : 13x + 9y = 2}$.
   (a) Justifier que $\boldsymbol{(E)}$ possède au moins un couple d'entiers solution.
   (b) Déterminer un couple $\boldsymbol{(x_0\ ;\ y_0)}$ d'entiers solution de $\boldsymbol{(E)}$.
   (c) Montrer que l'équation $\boldsymbol{(E)}$ est équivalente à $\boldsymbol{(E') : 13(x - x_0) = -9(y - y_0)}$.
   (d) Montrer que si $\boldsymbol{(x\ ;\ y)}$ est un couple d'entiers solution de $\boldsymbol{(E)}$ alors il existe un entier $\boldsymbol{k}$ tel que : $\boldsymbol{x = -4 + 9k}$ et $\boldsymbol{y = 6 - 13k}$.
   (e) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation $\boldsymbol{(E)}$.

Arithmétique et calculatrice - Corollaire du théorème de Gauss - Nombre de Mersenne

Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous :



Au vue des résultats, il affirme que $\mathbf{3}$ divise $\boldsymbol{2^{33} - 1}$ et $\mathbf{4}$ divise $\boldsymbol{2^{33} - 1}$ et que $\mathbf{12}$ ne divise pas $\boldsymbol{2^{33} - 1}$.
1) En quoi cette affirmation est-elle contradictoire ?
2) Justifier que, en réalité, $\mathbf{4}$ ne divise pas $\boldsymbol{2^{33} - 1}$.
3) Montrer que $\mathbf{3}$ ne divise pas $\boldsymbol{2^{33} - 1}$.
4) Démontrer que 7 divise $\boldsymbol{2^{33} - 1}$.

Théorème de Gauss : démonstration

L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème de Gauss :

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ trois entiers non nuls.
Si $\boldsymbol{a}$ divise le produit $\boldsymbol{bc}$ et si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont premiers entre eux, alors $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{c}$.

1. Rappeler le théorème de Bézout.
2. Montrer qu'il existe deux entiers $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ tels que $\boldsymbol{acu + bcv = c}$.
3. En déduire que $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{c}$.

Théorème de Gauss : un problème de dénombrement

Un joueur a totalisé $\mathbf{200}$ points en lançant sur une cible $\mathbf{25}$ fléchettes. La cible possède $\mathbf{3}$ zones qui rapportent respectivement $\mathbf{0}$, $\mathbf{5}$ et $\mathbf{12}$ points.

1. Montrer que le nombre de fléchettes qui ont touché la zone à $\mathbf{12}$ points est divisible par $\mathbf{5}$.
2. En déduire la répartition des fléchettes dans les différentes zones.

Théorème de Gauss : le corollaire

L'objectif de l'exercice est de démontrer le corollaire du théorème de Gauss :

Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{n}$ trois entiers non nuls.
Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ divisent $\boldsymbol{n}$ et si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont premiers entre eux, alors $\boldsymbol{ab}$ divise $\boldsymbol{n}$.

1. Montrer qu'il existe deux entiers $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k'}$ tels que : $\boldsymbol{ka = k'b}$.
2. Montrer que $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{k'}$.
3. En déduire que $\boldsymbol{ab}$ divise $\boldsymbol{n}$.

Corollaire du théorème de Gauss : produit de 5 entiers consécutifs

Montrer que le produit de $\mathbf{5}$ entiers consécutifs est divisible par $\mathbf{120}$.

Théorème de Gauss : le critère d'Eisenstein

Soient $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que si $\boldsymbol{\dfrac{p}{q}}$ est une solution de l'équation $\boldsymbol{(E)}$:
$$\boldsymbol{3x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0}$$
alors $\boldsymbol{p}$ divise $\mathbf{4}$ et $\boldsymbol{q}$ divise $\mathbf{3}$.
2. En déduire que l'équation $\boldsymbol{(E)}$ admet une unique solution rationnelle.

Théorème de Gauss : points à coordonnées entières sur une droite

Dans un repère orthonormé, on considère les points $\boldsymbol{A(7\ ;\ 2)}$ et $\boldsymbol{B(-3\ ;\ -4)}$.

1. Montrer qu'un point $\boldsymbol{M(x\ ;\ y)}$ appartient à la droite $\boldsymbol{(AB)}$ si et seulement si :
$$\boldsymbol{3(x-7) = 5(y-2)}$$
2. En déduire l'ensemble des points du plan à coordonnées entières appartenant à la droite $\boldsymbol{(AB)}$.

Théorème de Gauss : $a+b$ et ab entiers

Soient a et b deux rationnels (tous deux non nuls) tels que $a+b$ et ab sont des entiers.
On pose $a = \dfrac{p_1}{q_1}$ avec p_1 et q_1 deux entiers premiers entre eux (avec $q_1 > 0$) et $b = \dfrac{p_2}{q_2}$ avec p_2 et q_2 deux entiers premiers entre eux (avec $q_2 > 0$).

1. Montrer que q_1 divise q_2.
2. En déduire que $q_1 = q_2$.
3. Prouver que a et b sont des entiers.

Un problème de restes chinois

1. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \quad [17] \\ n \equiv 3 \quad [5] \end{cases}$$

   (a) On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
      i. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.
      ii. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.
      iii. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.

   (b) i. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.
      ii. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

2. Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

Chiffrement affine

On numérote les 26 lettres de l'alphabet de 0 pour A à 25 pour Z.
On choisit 2 entiers naturels a et b avec $a \neq 0$. Le couple $(a; b)$ s'appelle la **clé** de chiffrement.
Pour coder la lettre numéro x, on calcule $f(x) = ax + b$. Comme le résultat peut ne pas être compris entre 0 et 25, on prend son reste dans la division euclidienne par 26. Puis ce nombre est remplacé par la lettre correspondante.

1) A quel chiffrement affine correspond ce tableau ci-dessous ?

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	12	19	0	7	14	21	2	9	16	23	4	11	18	25	6	13	20	1	8	15	22	3	10	17	24

2) Rose propose d'utiliser la clé $(4; 7)$. Cette clé, est-elle satisfaisante ?

Chiffrement affine - Clé satisfaisante

On numérote les 26 lettres de l'alphabet de 0 pour A à 25 pour Z.
On choisit 2 entiers naturels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$. Le couple $\boldsymbol{(a;b)}$ s'appelle la **clé** de chiffrement.
Pour coder la lettre numéro $\boldsymbol{x}$, on calcule $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$. Comme le résultat peut ne pas être compris entre 0 et 25, on prend son reste dans la division euclidienne par 26. Puis ce nombre est remplacé par la lettre correspondante.

Gaspard propose d'utiliser la clé $\boldsymbol{(3;9)}$ pour coder un message.
1) Coder la lettre H.
2) Cette clé $\boldsymbol{(3;9)}$ est-elle satisfaisante ?

Chiffrement affine - Cas général

On numérote les 26 lettres de l'alphabet de 0 pour A à 25 pour Z.
On choisit 2 entiers naturels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$. Le couple $\boldsymbol{(a;b)}$ s'appelle la **clé** de chiffrement. Pour coder la lettre numéro $\boldsymbol{x}$, on calcule $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$. Comme le résultat peut ne pas être compris entre 0 et 25, on prend son reste dans la division euclidienne par 26. Puis ce nombre est remplacé par la lettre correspondante.
On dit qu'une clé est satisfaisante lorsque deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.
1) Montrer que si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{26}$ sont premiers entre eux alors la clé $\boldsymbol{(a;b)}$ est satisfaisante.
2) Dans la suite du problème, on choisit une clé $\boldsymbol{(a;b)}$ avec $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{26}$ premiers entre eux.
   a) Montrer qu'il existe un entier relatif $\boldsymbol{u}$ tel que $\boldsymbol{au \equiv 1}$ $[\boldsymbol{26}]$.
   b) Déterminer une fonction de décodage.
   c) Décoder le message **ZSPS** qui a été codé avec la clé $\boldsymbol{(15;2)}$.

Théorème de Gauss - Erreur classique vue dans des copies

On considère l'équation $\boldsymbol{3(x-2) = 10(y+5)}$ où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des entiers. Un élève écrit :

Comme $\boldsymbol{3(x-2) = 10(y+5)}$, *donc* $\boldsymbol{3}$ *divise* $\boldsymbol{10(y+5)}$.

Or $\boldsymbol{3}$ *ne divise pas* $\boldsymbol{10}$ *donc* $\boldsymbol{3}$ *divise* $\boldsymbol{y+5}$. *Donc* $\boldsymbol{y+5 = 3k}$ *avec* $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$.

1. Corriger l'erreur de l'élève.
2. Trouver un exemple pour convaincre l'élève que son raisonnement est faux.

Équation Diophantienne - Erreurs classiques vue dans des copies

On considère l'équation $\boldsymbol{(E): \ 14(x-6) = 9(y+2)}$ où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des entiers. Un élève écrit :

Comme $\boldsymbol{14(x-6) = 9(y+2)}$, *donc* $\boldsymbol{14}$ *divise* $\boldsymbol{9(y+2)}$.

Or $\boldsymbol{14}$ *et* $\boldsymbol{9}$ *sont premiers entre eux donc* $\boldsymbol{14}$ *divise* $\boldsymbol{y+2}$.

Donc $\boldsymbol{y+2 = 14k}$ *et donc* $\boldsymbol{y = -2 + 14k}$ *avec* $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$.

De même, $\boldsymbol{9}$ *divise* $\boldsymbol{14(x-6)}$. *Or* $\boldsymbol{9}$ *et* $\boldsymbol{14}$ *sont premiers entre eux.*

Donc $\boldsymbol{9}$ *divise* $\boldsymbol{x-6}$. *Donc* $\boldsymbol{x-6 = 9k'}$ *c'est à dire* $\boldsymbol{x = 6 + 9k'}$ *avec* $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$.

Les solutions de l'équation $\boldsymbol{(E)}$ *sont* $\boldsymbol{(6+9k'; -2+14k)}$ *avec* $\boldsymbol{k}$ *et* $\boldsymbol{k'}$ *entiers.*

Corriger les erreurs de l'élève.