**Divisibilité - Arithmétique**
**Spécialité Maths terminale S : Exercices**
Corrigés en vidéo avec le cours sur jaicompris.com

---

**Application directe de la divisibilité**
Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

---

**Démonstration des propriétés du cours**
$a$, $b$, $c$ sont trois entiers relatifs non nuls. Démontrer les propriétés suivantes :
1) Si $a$ divise $b$ et $b$ divise $c$ alors $a$ divise $c$.
2) Si $a$ divise $b$ et $b$ divise $a$ alors $a$ et $b$ sont égaux ou opposés.
3) Si $c$ divise $a$ et $b$ alors pour tous entiers relatifs $u$ et $v$, $c$ divise $au + bv$.

---

**8 divise $n^2 - 1$ ?**
1) Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair.
2) Démontrer que lorsque $n$ est un entier impair, 8 divise $n^2 - 1$.

---

**Avec la contraposée**
Soit $n$ un entier naturel. Démontrer que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

---

**Un classique**
Montrer que si l'on soustrait à un entier naturel strictement inférieur à 100, la somme de ses chiffres, alors le résultat est toujours divisible par 9.

---

**Fraction est irréductible**
Soit $n$ un entier naturel.

1. Montrer que si un entier naturel $d$ divise $12n + 7$ et $3n + 1$ alors il divise 3.
2. En déduire que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

---

Déteminer toutes les valeurs de l'entier relatif $n$ telles que $\dfrac{10n-4}{3n+1}$ soit un entier relatif.

---

Le nombre $n$ désigne un entier naturel.
1. Démontrer que $n + 1$ divise $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de $n$ pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.
3. En déduire que, quel que soit $n$, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

---

**Divisibilité de $a + b$ - les différents cas possibles** $a$, $b$ sont des entiers relatifs. $c$ est un entier relatif non nul.
**Rappel** : Si $c$ divise $a$ et $b$ alors $c$ divise $\begin{cases} a+b \\ \text{et} \\ a-b \end{cases}$
Que peut-on dire des affirmations suivantes. Justifier par un raisonnement.
1) Si $c$ divise $a$ mais pas $b$, alors $c$ ne divise pas $a + b$
2) Si $c$ ne divise ni $a$, ni $b$ alors $c$ ne divise pas $a + b$.
3) 3 ne divise pas $3n + 1$ où $n$ est un entier naturel.

---

**Résoudre une équation dans $\mathbb{N}$**

1. Donner la liste des diviseurs de 20 dans $\mathbb{N}$.
2. En déduire tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels solutions de l'équation :

$$4x^2 - y^2 = 20$$

---

**Divisibilité et combinaisons linéaires**
Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$ a-t-on $n + 8$ divisible par $n$ ?

**Récurrence et arithmétique**
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

---

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

---

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

---

Soit $P(n)$ la propriété définie sur $\mathbb{N}$ par :
$4^n + 1$ est divisible par 3
1°) Démontrer que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
2°) Que peut-on conclure ?

---

**Erreur classique dans les récurrences**
Pour tout entier naturel $n$, on considère les deux propriétés suivantes :
$P_n$ : $10^n - 1$ est divisible par 9
$Q_n$ : $10^n + 1$ est divisible par 9
1°) Démontrer que si $P_n$ est vraie alors $P_{n+1}$ est vraie.
2°) Démontrer que si $Q_n$ est vraie alors $Q_{n+1}$ est vraie.
3°) Un élève affirme : " Donc $P_n$ et $Q_n$ sont vraies pour tout entier naturel $n$.
Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4°) Démontrer que $P_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$.
5°) Démontrer que $Q_n$ est fausse pour tout entier naturel $n$.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

---

**Divisibilité : une équation de Pell-Fermat**
On considère l'équation $(E)$ : $a^2 - 2b^2 = 1$ et $(a\ ;\ b)$ un couple d'entiers solution de cette équation.

1. (a) Montrer que $a$ est impair.
   (b) Montrer que $b$ est pair.
2. Montrer que $a$ et $b$ sont premiers entre eux.
3. Montrer que le couple $(3a + 4b\ ;\ 2a + 3b)$ est aussi un couple solution de l'équation $(E)$.
4. A l'aide d'une solution évidente, trouver un couple solution avec des entiers supérieurs à 100.
5. Ecrire un algorithme en langage naturel permettant de trouver un couple solution avec des entiers supérieurs à un seuil fixé à l'avance.

---